

Potence z racionalnimi eksponenti — 30. domača naloga

Matematika, Gimnazija Bežigrad

Profesor: prof. Vilko Domajnko
Avtor: Anton Luka Šijanec, 2. a

12. april 2021

Povzetek

Ta dokument vsebuje navodila in rešitve domače naloge snovi *Potence z racionalnimi eksponenti* pri matematiki, ki sem jih spisal sam. Kjer je bilo potrebno izbrati neke poljubne naloge, sem jih vedno izbiral naključno.

Navodilo naloge listi: *Potence z racionalnimi eksponenti* / 1, ... 6 (povsod po en primer)

1. Zapiši v obliki potence z racionalnim eksponentom:

č) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a^5} = a^4$

2. Zapiši v obliki potence z racionalnim eksponentom:

a) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

3. Izračunaj:

e)

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[6]{9 - 4\sqrt{5} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}}\right) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \left(\sqrt[6]{(2 - \sqrt{5})^2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}}\right) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \\ & = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2 + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}}\right) \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2) \cdot (2 + \sqrt{5}) + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{5}) \cdot (2 + \sqrt{5})}} = \\ & = \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2)} + \sqrt[3]{4 - 5} = \sqrt[3]{5 - 4} + \sqrt[3]{-1} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

4. Poenostavi in zapiši v obliki ulomka (brez negativnih eksponentov):

b) $\left(2x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(2x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}\right)^5} = \frac{1}{32xy^4}$

5. Poenostavi:

b) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3 \cdot a^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{5}{3}}} = \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$

6. Poenostavi:

b) Vau, štiri korene smo spremenili v enega! Spodaj je praktična zanimivost.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^{20}}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x-1)^2}{x^5}\right)^3 \cdot \frac{x^{20}}{(x+1)^3 \cdot \left(\frac{x+1}{x^3}\right)^3}} = \\ & = \sqrt[6]{\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x-1)^2}{x^5}\right)^3 \cdot \frac{x^{20}}{(x+1)^3} \cdot \left(\frac{x+1}{x^3}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{x^4}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^6}{x^{15}} \cdot \frac{x^{20}}{(x+1)^3} \cdot \frac{(x+1)^3}{x^9}} = \\ & = \sqrt[6]{(x-1)^4 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x^5}} = \sqrt[6]{(x-1)^4} = \sqrt[3]{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Zanimivost Želim preveriti, kako taka optimizacija vpliva v resničnem življenju. Recimo, da se ta račun v računalniku izvede desetmilijonkrat v sklopu nekega procesa. Koliko procesorskega časa smo pridobili s tem, da smo štiri korene spremenili v enega? Kljub vsemu smo na koncu optimizacije dobili šesti koren, kar nikakor ni mačji kašelj za X86 arhitekturo. Najlažje je računalniku računati korene kvadratnih eksponentov (2, 4, 16, ...).

```

1 /* gcc kompleksnost.c -pedantic -Wall -Wextra -g -okompleksnost -lm -O0 */
2 #include <stdio.h>
3 #include <stdlib.h>
4 #include <math.h>
5 #include <time.h>
6 #define KOLIKOKRAT 10000001
7 #define nrx(x, y) powl((x), 1.0 / (y)) /* nti koren izpeljemo iz potence na 1/eks */
8 int main (void) { /* za kvadratne in kubicne korene uporabimo sqrt in cbrt */
9     long double rezultat = 0; /* da prevajalnik ne bi optimiziral */
10    long double rezultat2 = 0;
11    clock_t cas_zacetek, cas_konec, cas2_konec;
12    cas_zacetek = clock();
13    for (unsigned long long int x = 2; x <= KOLIKOKRAT; x++)
14        rezultat += cbrt1(powl(x, 2)/(x-1))*sqrt1(powl(x-1, 2)/powl(x, 5))*nrx(powl(x, 20)/
15        powl(x+1, 3), 6)*sqrt1((x+1)/powl(x, 3));
16    cas_konec = clock();
17    for (unsigned long long int x = 2; x <= KOLIKOKRAT; x++)
18        rezultat2 += nrx(pow(x-1, 2), 3);
19    cas2_konec = clock();
20    fprintf(stdout, "neoptimizirana enacba je za 10e6 iteracij porabila %lf sekund,
21    optimizirana pa %lf\n"
22    "rezultat = %Lf, rezultat2 = %Lf\n",
23    ((double) (cas_konec-cas_zacetek))/CLOCKS_PER_SEC,
24    ((double) (cas2_konec-cas_konec))/CLOCKS_PER_SEC,
25    rezultat,
26    rezultat2
27    );
28    return 0;
29 }

```

```

a@upor: [0]$ ./kompleksnost
neoptimizirana enacba je za 10e6 iteracij porabila 15.330899 sekund, optimizirana pa 4.157521
rezultat = 278495353224.555294, rezultat2 = 278495353224.555814
a@upor: [0]$

```

Ojej! Mislim, da je razlika očitna. Neoptimizirana enačba je porabila 10 sekund več. Optimizacija je torej zelo pomembna. Ampak zakaj tega namesto nas ne delajo računalniki? V GNU prevajalniku C jezika sem avtomatno optimizacijo nastavil na nivo 0, kar pomeni, da prevajalnik ne dela optimizacij, v navodilih za uporabo pa sem, poleg drugih, zasledil še eno opcijo, `fast`. Opcija `fast` je sicer eksperimentalna in nepriporočena, vendar dela čudeže! Če program prevedem z optimizacijskim nivojem `fast`, bo računanje neoptimizirane enačbe in optimizirane trajalo približno enako dolgo.

```

a@upor: [0]$ gcc kompleksnost.c -pedantic -Wall -Wextra -g -okompleksnost -lm -Ofast
a@upor: [0]$ ./kompleksnost
neoptimizirana enacba je za 10e6 iteracij porabila 5.326709 sekund, optimizirana pa 4.017244
rezultat = 278495353224.555294, rezultat2 = 278495353224.555814
a@upor: [0]$

```

1 Zaključek

Ta dokument je informativne narave in se lahko še spreminja. Najnovejša različica, torej PDFji in \LaTeX ¹ izvorna koda, zgodovina sprememb in prejšnje različice, je na voljo v mojem šolskem Git repozitoriju na <https://git.sijane.c.eu/sijanec/sola-gimb-2> v mapi `/mat/domace_naloge/30/`. Povezava za ogled zadnje različice tega dokumenta v PDF obliki je http://razor.arnes.si/~asija3/files/sola/gimb/2/mat/domace_naloge/30/dokument.pdf in/ali https://git.sijanec.eu/sijanec/sola-gimb-2/raw/branch/master/mat/domace_naloge/30/dokument.pdf.

¹Za izdelavo dokumenta potrebujete TeXLive 2020.

Razhroščevalne informacije

Te informacije so generirane, ker je omogočeno razhroščevanje. Pred objavo dokumenta izklopite razhroščevanje. To naredite tako, da nastavite ukaz `razhroscevanje` na 0 v začetku dokumenta.

Grafi imajo natančnost 100 točk na graf.

Konec generiranja dokumenta: 12. april 2021 ob 12:08:00²

Dokument se je generiral 3 s.

²To ne nakazuje dejanskega časa, ko je bil dokument napisan, temveč čas, ko je bi dokument generiran v PDF/DVI obliko. Isto velja za datum v glavi dokumenta. Če berete direktno iz LaTeX datoteke, bo to vedno današnji datum.